Kants Raumlehre und ihr Verhältnis zur Geometrie.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der

hohen Philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL

vorgelegt

von

Walther Dietrich

aus Luckau.

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juli 1904.

Halle a. S.
Buchdruckerei von Heinrich John.
1904.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549826_0142

Meiner lieben Mutter!

„Es wird allemal ein bemerkungswürdiges Phänomen in der Geschichte der Philosophie bleiben, dass es eine Zeit gegeben hat, da selbst Mathematiker, die zugleich Philosophen waren, zwar nicht an der Richtigkeit ihrer geometrischen Sätze, sofern sie bloss den Raum betrafen, aber an der objektiven Gültigkeit und Anwendung dieses Begriffs selbst und aller geometrischen Bestimmungen desselben auf Natur zu zweifeln anfingen.“ Diese Worte der Prolegomena, welche Kant in den Anmerkungen zu seiner Lehre vom Raume also am Schluss seiner Erörterungen über diese schrieb, sind für unsere Zeit wieder zutreffend geworden. In der zahlreichen Litteratur, welche die moderne Mathematik über die Grundlagen der Geometrie gezeitigt hat, ist dieser Zweifel an der Tagesordnung. Aber das Charakteristische ist, dass alle Autoren die Dignität der Geometrie auf den Ursprung unserer Raumanschauung zu gründen suchen; als ob jemals die Tatsachen, die sie in unsern psychischen und physiologischen Processen aufdecken, ihnen sagen können, dass der Raum die und die Eigenschaften haben muss. Eine Erklärung für die Notwendigkeit, mit der wir in der Geometrie urteilen, ist noch niemanden geglückt, der der Sache mittelst psychologischer Untersuchung auf den Grund kommen wollte.

Soviel schätzenswertes Material diese auch zu Tage förderte, die Kantische Frage blieb bestehen: wie ist eine Wissenschaft vom Raum auf die Natur d. h. auf Gegenstände einer möglichen Erfahrung anwendbar? Von ihrer Lösung hängt nicht nur das Schicksal der Geometrie, sondern auch aller Naturwissenschaft ab, so weit sie einer mathematischen Behandlung bedarf. Das ist der Punkt, von dem Kant ausging. Für ihn war Newtons Naturwissenschaft das Gegebene, und seine Aufgabe war es zu prüfen, woher sie ihre Wertansprüche nimmt.

Dieser ganzen Erfahrung gegenüber, wie sie in Newtons Werk ihren ersten systematischen Ausdruck gefunden hat, fragt Kant: wie kommt sie dazu, objektive Gültigkeit zu verlangen? Wenn er dann antwortet: Sinnlichkeit und Verstand sind die beiden echten und einzigen Quellen, so ist dies für ihn nicht eine psychologische Erklärung unseres Erkenntnisvermögens, sondern eine Unterscheidung der Elemente unserer Erfahrung, die lediglich erkenntniskritische Bedeutung hat. Ob sie psychologisch gerechtfertigt werden kann — und sie wird es (Thiele, intellektuelle Anschauung bei Kant) — ist hier ganz nebensächlich. Die erkenntnistheoretische Berechtigung folgt unmittelbar daraus, dass auch bei Kant niemals eine dieser Quellen allein wirkliche Erfahrung giebt. Beide müssen zusammenfliessen; Anschauungen ohne Begriffe sind blind, Begriffe ohne Anschauungen sind leer. Es war ein Fehler Kants und die Ursache aller Missverständnisse, dass er nicht im Anfange seiner Kritik die Notwendigkeit dieses Zusammenwirkens betont und dann erst entwickelt hat, was die Sinnlichkeit, was der Verstand zu unserer Erfahrung beiträgt. Hätte er sogleich in der Ästhetik bemerkt, dass auch Raum und Zeit einen transcendentalen Beweis nötig haben, so wäre das Märchen vom Pendant und alles Gewichtlegen auf die psychologische Berechtigung seiner Methode unmöglich gewesen. Und nur die tatsächlich völlige Unabhängigkeit der Kantischen Raumlehre von jedweder psychologischen Hypothese bürgt noch heute für ihren erkenntnistheoretischen Wert.

Gerade zum Verständnis der metaphysischen Erörterung ist der Ausgang Kants von Newtons Naturphilosophie zu beachten. Neben der Materie hatte Newton den absoluten Raum und die absolute Zeit als ursprünglich gegeben angenommen, und damit schon unbewusst seinem Gegner Leibniz auch auf philosophischem Gebiete die Niederlage vorbereitet. Wie nun die sämtlichen vorkritischen Schriften zeigen, ist es dieser absolute Raum, mit dem Kant sich beschäftigt. Leider hat er in der Kritik dies nicht vermerkt, vielleicht glaubte er sich auch von seinem grossen Vorgänger frei gemacht zu haben. Aber dem ist nicht so. Nur vom absoluten Raume Newtons gilt Kants transcendentale Ästhetik, nicht von unserm Wahr-

nehmungsraume: „Damit ich etwas als ausser und nebeneinander, mithin nicht bloss verschieden, sondern als in verschiedenen Orten vorstellen könne, dazu muss die Vorstellung des Raumes schon zum Grunde liegen.“ Alles dies wäre etwas Selbstverständliches, wenn man nicht den Raum Newtons darunter verstände. Mit Recht bemerkt allerdings Poincaré: „L'espace représentatif n'est qu'une image de l'espace géométrique, image déformée par une sorte de perspective, et nous ne pouvons nous représenter les objets qu'en les pliant aux lois de cette perspective.“ Aber diese Gesetze sind uns nur gegeben, wenn wir den Raum des Geometers kennen. So muss denn auch Poincaré sagen: „Nous ne nous représentons donc pas les corps extérieurs dans l'espace géometrique, Mais nons raisonnons sur ces corps, comme s'ils étaient situés dans l'espace géométrique.“ Etwas anderes meint auch Kant nicht. Der Wahrnehmungsraum, mit dem uns die Körper gegeben sind, ist ebenso wie diese ein empirisches Element. Aber damit wir uns einen Körper vorstellen und ihn zum Gegenstand einer Erfahrung, nicht einer Wahrnehmung, machen können, dazu muss der Raum des Geometers schon zu Grunde liegen. Erst dadurch, dass wir uns einen Gegenstand als in einem bestimmten Orte, also auf ein unbewegliches Coordinatensystem bezogen oder als ein Zeitliches denken, erst dadurch wird es für unsere Erfahrung zu einem „Etwas“.

Daher ist es auch kein Cirkel und nichts Selbstverständliches, wenn Kant sagt, dass nur durch die Raumvorstellung alle äussere Erfahrung möglich ist. Allerdings ist damit noch nicht gesagt, dass dies die euklidische ist, sondern zunächst nur die Tatsache, dass alles sinnlich Gegebene, auch die einzelnen empirischen Räume, auf einen unendlichen Raum bezogen erscheint, wie ihn der Geometer denkt.

Wir sehen jetzt auch ein, mit welchem Recht Kant gegen Hume sagt: „Der Raum ist kein empirischer Begriff, der von äusseren Erfahrungen abgezogen worden“. Jede Wahrnehmung, die in eine Erfahrung eingehen soll, ist ja schon in den absoluten Raum lokalisiert. Allerdings vom Wahrnehmungsraum gilt der Satz Kants nicht. So wissen wir z B., dass der visuelle Raum inhomogen und nicht iso-

trop ist, wobei ja bekannt ist, dass die letztere Eigenschaft, die Abweichung der Tiefenrichtung von den beiden andern Dimensionen, sogar erst durch Muskelempfindungen uns zum Bewusstsein kommt. Also kann der geometrische Raum nicht von äusseren Erfahrungen abgezogen sein, da er ja Bestimmungen enthält, die uns die Wahrnehmung niemals liefern kann.

Damit giebt uns schon der erste Abschnitt der metaphysischen Erörterung in gewisser Beziehung die Apriorität der Raumvorstellung; aber nur zusammen mit der Vorstellung der Zeit. Diese versucht der zweite Abschnitt beiseite zu lassen. Er behauptet, dass man sich niemals eine Vorstellung davon machen kann, dass kein Raum sei. Beim normalen Menschen können wir uns sicher keinen Bewusstseinzustand denken, der vor der Raumvorstellung wäre. Aber z. B. ein von Geburt auf gelähmter Blindgeborener hat zwar durch seine Tastempfindungen die Vorstellung des Ausser ihm. Jedoch eine Raumvorstellung selbst in ihren allgemeinsten schematischen Eigenschaften wird er nicht haben. Die Töne geben ihm Nachricht von Einem, worin er und ein Anderes ist, aber nicht einmal die Teilbarkeit und Unendlichkeit, geschweige die Stetigkeit dieses Ausser ihm wird ihm die Verschiedenheit der Intensität der Töne zum Bewusstsein bringen. Für jegliche Erfahrung im gemeinen Sinne können wir also der Raumvorstellung nicht Notwendigkeit beilegen. Wenn wir aber von der Möglichkeit einer Erfahrung im Newtonschen Sinne ausgehen, so leuchtet uns bald ein, dass der Raum die Bedingung der Möglichkeit aller Erscheinungen ist. Auch eine Wissenschaft vom Schall ist nur dann Erfahrung, wenn die Schallschwingungen mathematisch d. i. räumlich behandelt werden können. Wie den Schall, so müssen wir jede Naturerscheinung in den Raum verlegen, um sie in eine wirkliche Erfahrung einbegreifen zu können. „Dass eine Physik unabhängig von der Mathematik existiere“ wird heute ebenso wenig wie ehemals jemand auf die blosse Autorität Goethes hin glauben. Der Raum ist daher wirklich notwendig für alles, was für uns Erfahrung werden soll. Nur wenn diese im Newtonschen Sinne aufgefasst wird, fällt der Herbartsche Vorwurf der quaternio terminorum fort. Allerdings „nachdem

die Erfahrung irgend ein Wirkliches gezeigt hat, wird allemal der Ausdruck der blossen Möglichkeit dieses Wirklichen ein notwendiger Gedanke", aber nur für die gemeine Erfahrung. Die Newtonsche bleibt bestehen, wenn ich z. B. die Lichterscheinungen fortlasse; aber durch Aufhebung des Raumes ist sie gänzlich zerstört. Setze ich nur die Dreizahl der Dimensionen als möglich, so wäre an sich nur die Form der Erfahrung eine andere. Es folgt daraus, dass auch nicht die Newtonsche völlig genügt, um den Schluss von der Notwendigkeit auf das apriori des Raumes, den der Geometer den euklidischen nennt, zu rechtfertigen. Und in der Tat, man hat ja eine Mechanik im pseudosphärischen Raume aufzubauen versucht. Sie unterscheidet sich anscheinend in nichts von unserer gewöhnlichen. Aber bedenken wir dabei ja, dass in einer solchen Mechanik die Natur nicht begreiflich erscheint. Dazu gehört offenbar, dass die einzelnen Fälle von Bewegung etc. anschaulich sind. Alle Versuche aber, jene Anschaulichkeit z. B. des pseudosphärischen Raumes zu demonstrieren, sind längst als verfehlt erkannt worden. So dienen sie vielmehr zur Bekräftigung der Kantischen Lehre, als sie ja zeigen, dass jede andere Mannigfaltigkeit nur soweit anschaulich ist, als sie in unserm euklidischen Raum abgebildet werden kann.

Damit hat sich schon im zweiten Abschnitte, wenn wir den Begriff der Erfahrung hinzunahmen, die Notwendigkeit unserer Raumvorstellung ergeben. Diese erkennen wir schon hier als eine nicht psychologische. Sie wäre dies, wenn sich der erste Abschnitt trotz seiner sprachlichen Form nicht anders auffassen liesse, als ein Beweis für das zeitliche Vorhergehen unserer Raumvorstellung. Einmal aber gäbe uns dann der erste Abschnitt nur etwas Selbstverständliches, und dann träfe Herbarts Vorwurf der quaternio ganz offenbar zu. Wenn wir also schon hier mit Kant auf das apriori der Raumvorstellung schliessen, so ist uns nach der obigen Darstellung klar, dass die Apriorität kein zeitliches, sondern ein begriffliches Verhältnis des Raumes zu unserer Erfahrung bezeichnet.

Der noch übrige Teil der metaphysischen Erörterung dient dazu, die Art der Realität des Raumes vorzubereiten.

Die Erkenntnis, dass er überhaupt eine ihm „eigene Realität“ besitze, war Kant schon in der Schrift v. J. 1768 durch das Problem der Symmetrie aufgegangen. Aber es war ein Rest vorkritischer Auffassungsweise, dass er diese Realität damals als eine absolute ansah. Der erste Schritt zur Subjektivität geschieht noch im zweiten Abschnitt: man kann sich ganz wohl denken, dass keine Gegenstände im Raume angetroffen werden. Könnte ich ihn leer vorstellen, so wäre jene Realität vom J. 1768 bewiesen. Aber die Vorstellung haftet stets an Empfindungselementen. Man kann sich nur „denken“, dass der Raum leer sei. Dies gilt sowohl vom Wahrnehmungs- wie vom absoluten Raum. Wir fragen uns aber: können wir daraus mit Kant schliessen, dass der Raum nicht als eine von den Dingen abhängende Bestimmung angesehen werden darf? — Bei dem Wahrnehmungsraum ist dies sicher unmöglich. Was dem Begriff nach ohne Widerspruch getrennt werden kann, braucht seiner Existenz nach von einander nicht unabhängig zu sein. Und tatsächlich werden die Lagenbeziehungen des Raumes, seine dreifache Ausdehnung u. s. w. durch die objektive Wirklichkeit bedingt sein. Wir erinnern hier nur an den interessanten Beweis Lotzes von der Subjektivität des Raumes. Mit Recht schliesst er an der einen Stelle seine Erörterungen mit dem Satze: „Die Dinge sind nicht im Raume, sondern der Raum ist in den Dingen.“ Darum sagen wir an dieser Stelle bei Kant besser, der Raum ist keine den Empfindungselementen oder Qualitäten anhängende Bestimmung. Kant kommt selbst später auf diese Frage zurück. In der Anmerkung zur ersten Antinomie sagt er: „Dinge also, als Erscheinungen, bestimmen wohl den Raum, d. i. unter allen möglichen Prädikaten desselben (Grösse, Verhältnis) machen sie es, dass diese oder jene zur Wirklichkeit gehören.“ Hier spricht er offenbar von dem Wahrnehmungsraum, denn hier unterscheidet er ihn wirklich vom absoluten Raum Newtons. „Der Raum, vor allen Dingen (— von dem also die Apriorität nachgewiesen ist —), die ihn bestimmen, oder die vielmehr eine seiner Form gemässe empirische Anschauung geben, ist unter dem Namen des absoluten Raumes nichts anderes als die blosse Möglichkeit äusserer Erscheinungen.“ In diesem

Sinne können wir allerdings dann auch sagen, der Raum ist keine von den Dingen abhängende Bestimmung. Aber das sagt dann nichts weiter wie das frühere Resultat: Der Raum ist apriori.

Erst im vierten Abschnitte wird seine Subjektivität ausgesprochen. Durch die Antinomie des Unendlichen ist ja Kant erst zum Raumproblem gelangt, und in der Unendlichkeit liegt für ihn der erste Beweis — besser die erste Bestätigung — für die Lehre von der Subjektivität des Raumes. Schon in der Dissertation v. J. 1770 hatte er gefunden, dass in quanto continuo regressus a toto ad partes dabiles, in infinito autem progressus a partibus ad totum datum carent termino. Ein Satz, der in der Kritik klassische Fassung gefunden hat, dass der wahre Begriff der Unendlichkeit der ist, „dass die successive Synthesis der Einheit in der Durchmessung eines Quantums niemals vollendet sein kann." Auch in der Ästhetik könnte ihm kein Begriff von Verhältnissen ein Principium der Unendlichkeit derselben mit sich führen, wenn es nicht die Grenzenlosigkeit im Fortgange der Anschauung wäre. Alle diese Stellen zeugen, wie nahe Kant dem Begriff des Unendlichen gekommen ist. Gerade nachdem die moderne Mengenlehre gezeigt hat, dass das Linearkontinuum d. h. die Gesamtheit aller endlichen Zahlen nicht abzählbar ist und auch das mehr-dimensionale Kontinuum die gleiche Mächtigkeit besitzt wie das lineare, sodass diese als die obere*) Grenze für die Mächtigkeit irgend welcher in einem beliebigen Raum gelegenen Punktmenge erkannt war, ist es klar, dass der Begriff des wahren Unendlichen im Fehlen jedes Hindernisses bei der successiven Synthesis, d. h. im Subjekt zu suchen ist. Ob wir nun mit Dühring die Unendlichkeit der Zeit und des Raumes auf die der Zahl zurückführen wollen, ist eine andere Frage. Sicher aber tritt die Unendlichkeit durch das Subjekt auf; ob sie nur im Subjekt ihren Grund hat, wird später zu erörtern sein.

Zuvor wollen wir auf die Bedeutung der Kantischen Anschauung eingehen, wie sie durch den dritten Abschnitt der metaphysischen Erörterung eingeführt wird. Auch hier

*) Soweit man hier, im Unendlichen, von einer oberen Grenze sprechen kann.

bemerken wir, dass nur der absolute Raum als reine Anschauung bezeichnet werden darf. Dieser allein ist „blos die Form der äusseren Anschauung, aber kein wirklicher Gegenstand, der äusserlich angeschaut werden kann.“ Daher ist auch von ihm keine allgemeine Vorstellung und somit im gewöhnlichen Sinne kein diskursiver oder allgemeiner Begriff möglich. Ein solcher „enthält eine Regel der Verknüpfung verschiedener Merkmale, die in jedem Einzelnen befolgt sein muss, das in den Umfang dieses Begriffs gehören soll.“ „Aber kein Begriff als ein solcher kann so gedacht werden, als ob er eine unendliche Menge von Vorstellungen in sich enthielte.“ Wenn nun aber Kant fortfährt: „Gleichwohl wird der Raum so gedacht“, so ist das falsch. Die einzelnen Raumteile, aus denen man sich den Gesamtraum zusammengesetzt denken kann, sind keineswegs „Beispiele der Räumlichkeit“. Ihnen fehlt ja z. B. grade das vorzüglichste Merkmal des Raumes: die Unendlichkeit. Die Teile des alleinigen Raumes im Raumbegriff entsprechen also nicht den einzelnen Exemplaren z. B. eines Allgemeinbegriffes Pferd, sondern den Teilen, aus denen ein Pferd zusammengesetzt ist. Das Verschiedene ist blos, dass die Teile des Raumes gleichartig, die eines Pferdes dagegen ganz disparat sind. Dies kommt aber dem Raumbegriff nicht als Begriff zu, sondern gehört zum Inhalt des Begriffs. Diese Kantischen Bedenken gegen den Begriff vom Raum waren aber beseitigt, sobald gezeigt war, dass die Axiome „verkleidete Definitionen“ sind. Wie die vervollständigten Axiome Euklids den Raum definieren, von dem wir behaupten, dass er für Gegenstände unserer Erfahrung gelten muss, so definieren die Axiome Lobatscheffkys den pseudosphärischen Raum u. s. w. Wenn aber Kant trotzdem glaubte, dieser reinen Anschauung die Würde eines Begriffs versagen zu müssen, so entsprang dies der Erwägung, dass sie eine ganz andere Stellung in dem Fortlauf unserer mathematischen Erkenntnisse einnimmt als die sonstigen mathematischen Begriffe.

Und hiermit sind wir an dem wichtigsten Punkt in Kants Entwicklung angelangt, an seiner Unterscheidung zwischen metaphysischer Erkenntnis aus Begriffen und mathematischer aus der Konstruktion der Begriffe. Jene zergliedert

ihre Begriffe und bringt sie dadurch zu einer deutlichen und möglichst vollständigen Definition. Ihre Methode ist rein analytisch. Das Wesen der mathematischen Begriffe aber ist, dass sie allein durch Konstruktion in der reinen Anschauung bestehen und entstehen. Damit sie also in Urteile eingehen, muss ich sie konstruieren, d. h. nach Kant, ich muss sie auf Objekte beziehen, die in der Anschauung möglich sind. Nun ist dies für den Geometer offenbar unsere reine Anschauung des Raumes, „in welcher dasjenige, was aus den allgemeinen Bedingungen der Konstruktion folgt, allgemeine und — wie wir später sehen werden — objektive Gültigkeit hat." Die reine Anschauung ist also notwendig, damit ein mathematisches Urteil überhaupt zustande kommt; denn in ihr allein können die mathematischen Begriffe verknüpft werden. Dies gilt nicht nur für die Sätze der Geometrie, sondern auch für die allgemeine Grössenlehre. Jede Gleichung oder Ungleichheit, sofern sie nicht eine Identitätsbeziehung ist, drückt die Gleichheit oder Ungleichheit der Resultate zweiter Operationen aus, die allein in Beziehung auf eine mögliche Anschauung zu vollziehen sind. In der Buchstabenrechnung ist dies die reine Anschauung der Zeit, in der Geometrie die des Raumes. Auch hier giebt uns die moderne Mathematik eine Bestätigung, indem sie uns zeigt, dass die Möglichkeit irgendwelcher Grössenbeziehungen, wie sie durch die Gleichungen $a > b$; $a = b$; $a < b$, definiert werden, ihren Grund hat in der Abbildung.

Mit Recht stellt Kant daher die reine Anschauung den Begriffen selbst gegenüber, die nur durch sie Existenz haben. Und dadurch, dass er erkannte, dass alle mathematischen Begriffe der Konstruktion bedürfen, hat er als erster die Bedeutung und Eigenart der mathematischen Methode festgestellt. Bei Deskartes war die Ausdehnung noch die Substanz selbst. Der Mechaniker Leibniz setzte das être capable d'action auf diesen metaphysischen Ehrenplatz; der Raum blieb ihm aber als ordre des coexistences possibles eine „ewige aber abgeleitete Wahrheit". Damit rettete er die Allgemeinheit der mathematischen Sätze gegen Hume, dem der Raum ein von zweifelhaften Impressionen abgezogener Begriff war. Aber

die Methode der Mathematik war dadurch so völlig verkannt, dass sie sich nach seinem Schüler Wolff ihre schönsten Beweise aus der Logik borgte. Dieser vielmächtigen Schule gegenüber, die da glaubte, aus dem allgemeinen Begriff der Ähnlichkeit die Ähnlichkeitssätze beweisen zu können, machte Kant den transcendentalen Unterschied zwischen Vernunfterkenntnis aus Begriffen und mathematischer aus der Konstruktion der Begriffe geltend. Gerade dass dieser Unterschied transcendental ist, d. h. auf die Methode und nicht auf den Grad der Deutlichkeit geht, ist die Entdeckung der Kritik. Damit war aber zugleich gegeben, was die Sinnlichkeit zu unserer Erkenntnis beiträgt. Denn der Raum ist als reine Anschauung die Form der Sinnlichkeit.

Dieser Schluss bedarf noch einer näheren Vorbereitung. Wir hatten gefunden, der Raum ist apriori d. h. von der Erfahrung unabhängig, weil jede Erfahrung überhaupt erst möglich machend.

In den geometrischen Sätzen haben wir also von der Erfahrung unabhängige Urteile, denen durch die Konstruktion Allgemeingültigkeit zukommt. Wie soll nun diese Wissenschaft vom Raume als eine von der Erfahrung unabhängige für Gegenstände der Erfahrung giltig sein? das ist die Kardinalfrage. Selbst in der Form der Prolegomena: wie ist reine Mathematik möglich? geht sie auf die Giltigkeit von Objekten der Erfahrung. Die ganze transcendentale Untersuchung dient nicht dazu, „ihre (der mathematischen Sätze) Richtigkeit und apodiktische Gewissheit zu beweisen, welches sie garnicht nötig haben," sondern sie fragt, wie sind mathematische Sätze, obwohl apriori, von Objekten der Erfahrung gültig? Von diesem Gesichtspunkt aus ist der ganze Streit um die Stellung der reinen und angewandten Mathematik im Systeme Kants überflüssig. Für ihn ist bei seiner Untersuchung die Mathematik nichts als ein „Instrument der Erfahrung", und auch die reine Mathematik wäre nichts als eine Beschäftigung mit Hirngespinnsten, wenn sie nicht unter gewissen Bedingungen in der Natur ihre Objekte wiederfände. Es ist ganz gleichgültig für unsere jetzige Frage, was in der angewandten Mathematik von reinen Verstandes- und empirischen

Begriffen hinzutritt. Über allem steht die transcendentale Frage: wie kann die Geometrie, die wir auf einer von der Erfahrung unabhängigen Anschauung beruhen sahen, wie kann sie objektive Giltigkeit beanspruchen? Sie geht auf die Wertansprüche der Mathematik und ist für jede Wissenschaft zu stellen, welche unabhängig von unserer Erfahrung diese erweitern will. Aber niemals wird diese Frage durch die Psychologie zu beantworten sein. Die Dignität der Mathematik auf die Konstitution der Species oder des Individuum Mensch stützen, heisst ihren Wert überhaupt vernichten. Dann könnte jeder auftreten und erklären, dass für ihn dieser Anschauungszwang nicht bestehe. Es ist fast, wie wenn man in der Logik den Identitätssatz auf einen subjektiven Zwang des Individuums gründen wollte. Und die dies getan, haben ja auch jede Allgemeingültigkeit irgendwelcher Urteile aufgehoben.

Wenn daher Kant jene Kardinalfrage der Kritik durch Psychologie hat geglaubt lösen zu können, so war sein Unternehmen verfehlt und ist heute nicht mehr wert, überhaupt berücksichtigt zu werden. Aber das ist trotz des äusseren sprachlichen Gewandes seiner Untersuchungen nicht der Fall. Es besteht — wie Husserl in seinen logischen Untersuchungen betont — eben „ein Unterschied der psychologischen Betrachtungsweise, welche die Termini als Klassentermini für psychische Erlebnisse verwendet, von der objektiven oder idealen Betrachtungsweise, in welcher ebendieselben Termini aristotelische Gattungen und Arten bedeuten," d. h. einen logisch erkenntnistheoretischen Charakter haben. Diesen Unterschied muss man sich besonders bei Kant stets vor Augen halten, und nur vom erkenntniskritischen Standpunkte seine Antwort auf die Frage betrachten: Wie hat die Wissenschaft der von der Erfahrung unabhängigen Anschauung objektive Gültigkeit für Gegenstände der Erfahrung? — „Offenbar nicht anders, als sofern sie (die Anschauung) bloss im Subjekte als die formale Beschaffenheit desselben von Objekten afficiert zu werden und dadurch unmittelbare Vorstellung derselben d. i. Anschauung zu bekommen, ihren Sitz hat, also nur als Form des äusseren Sinnes überhaupt."

So wenig wie die Anschauung einen hervorragenden psychologischen Charakter hat, ebensowenig bedeutet die Bestimmung: „als Form ihren Sitz hat“ eine angeborene Qualität der Sinne. Kant geht vielmehr von dem realen Vorstellungsinhalt aus. Wir hatten gesehen, ein solcher tritt stets als ein Räumlicher oder Zeitlicher auf. In ihm nennt nun Kant das noch nicht räumlich und zeitlich Geordnete die Materie oder Empfindung. Raum und Zeit sind dann die Formen, welche eine solche Kantische Empfindung zur Erscheinung d. i. zum wirklichen Inhalt einer Vorstellung machen. Die Trennung in Materie und Form an einer Erscheinung ist ebenso wenig auf irgendwelche psychologische oder physiologische Konstitution aufgebaut, dass es vielmehr in Wirklichkeit unmöglich ist, in einer Vorstellung das Intensive vom Extensiven zu trennen, wie dies Riehl in seinem phil. Kriticismus von der Raumanschauung gezeigt hat. Von dieser Auffassung aus versteht man, wie diese Form als Form der Sinnlichkeit im Subjekt ihren Sitz hat; weil eben „das worinnen sich die Empfindungen (die Kantischen, nicht die der modernen Psychologie) allein ordnen und in gewisse Formen gestellt werden können, nicht selbst wiederum Empfindung sein kann.“ sondern nur daher rühren kann, dass das Subjekt afficiert wird. Treffend nennt Kant Form „dasjenige, welches macht, dass das Mannigfaltige der Erscheinung in gewissen Verhältnissen geordnet angeschaut wird.“ Nicht die Fähigkeit, etwas in gewisse Verhältnisse zu ordnen, ist die Form der Sinnlichkeit, sondern die „offene Möglichkeit“, überhaupt Anschauungen zu erhalten.

Man hat sich nun gefragt, wie es möglich ist, dass unser Raum mit seiner Dreizahl der Dimensionen und den so bestimmten Lagenbeziehungen formal sein kann. Solche Formen, sagt Helmholtz, müssten „inhaltsleer und frei genug sein, um jeden Inhalt, der überhaupt in die betreffende Form der Anschauung eintreten kann, aufzunehmen. Die Axiome der Geometrie aber beschränken die Anschauungsform des Raumes, sodass nicht mehr jeder denkbare Inhalt darin aufgenommen werden kann.“ Daher hat man versucht und offenbar mit einem gewissen Recht, von der bestimmt gegebenen Raum- und Zeit-form ein allgemeines Schema loszulösen, das nur aus den

beiden Formen gemeinschaftlichen Eigenschaften besteht. Aber da spielt dem Philosophen die moderne Geometrie einen Streich. Völlig streng leitet sie ab, dass auch z. B. das archimedische Axiom der Stetigkeit nicht für die andern Axiome vorausgesetzt ist, sondern diese z. B. das Parallelenaxiom ganz unabhängig von jenem bestehen; dass man also ebenso eine Geometrie aufbauen kann, in denen alle Axiome bis auf das Archimedische gelten, wie eine nicht Euklidische, in der alle Axiome, ausgenommen den Satz von dem Parallelen, gelten. Von den fünf Axiomgruppen, wie sie Hilbert in seinen „Grundlagen der Geometrie" aufstellt, sind nur die beiden ersten für die übrigen Grund legend. Es nützt an dieser Stelle also nichts, sich auf eine rein schematische Form zurückzuziehen, die nur die Stetigkeit und Unendlichkeit des Raumes in sich befasste. Als reine Anschauung und als Form können wir nur den Raum bezeichnen, den der Geometer den Euklidischen nennt.

Und dabei ist das Eigentümliche: Gerade Helmholtz mit seiner physiologischen Auffassung der Kantischen Form hat am wenigsten Veranlassung deren Bestimmtheit in der Dreizahl der Dimensionen und den Lagenbeziehungen als nicht formal genug zu bemängeln. Gerade die Analogie mit den specifischen Sinnesenergieen, auf die er immerfort hinweist, zeigt uns, wie bestimmt eine solche Auffassungsform sein könnte. Als Farbe empfinden wir nur Schwingungen von einer Wellenlänge zwischen 0,7 und 0,35 Tausendstel Millimeter. Aber das kann uns nicht eine Bestätigung für die Möglichkeit der Kantischen Form sein. Vielmehr warnt Kant ja selbst davor, sie andern subjektiven Qualitäten an die Seite zu stellen. Niemals kann die Raumanschauung als ein Organ, d. h. ein in der Organisation des Subjekts gelegener Zwang aufgefasst werden. Bei psychologischer Analyse der Raumvorstellung kann man natürlich, wenn man deren Subjektivität nachgewiesen, sich Intelligenzen ersinnen, die anders — etwa nur mit zwei Dimensionen — anschauen als wir. Kant hat ja als erster jene Idee einer anderen als der menschlichen Raumform koncipiert. Ebenso stand ihm die logische Möglichkeit anderer als der euklidischen Axiome so fest als die Unabhängigkeit der einzelnen von einander. Aber für den Gang

seiner kritischen Untersuchungen sind seine Andeutungen über eine andere als die euklidische Raumform ganz belanglos. Dass der Raum die Form ist, unter der allein von uns ein Gegenstand angeschaut werden kann, spricht nur die Tatsache aus, dass alles was Gegenstand äusserer Erfahrung werden soll, uns stets erscheinen muss, geordnet in unsern euklidischen Raum. Wer aber diese Tatsache bestreiten wollte, müsste nachweisen, dass auch ein Raum, in dem die Axiome Euklids nicht gelten, anschaulich ist. Jeder derartige Nachweis scheitert, und darum ist jene Tatsache ebenso unwiderleglich wie gewiss.

Da sagen nun die Gegner Kants: ganz richtig, dann gebt ihr jedoch der Geometrie den Charakter einer Tatsache, macht sie zu einer in ihren Grundlagen empirischen Wissenschaft; mehr behaupten wir ja auch nicht. — Wir hatten nachgewiesen. Für eine Naturwissenschaft im Newtonschen Sinne war der absolute Raum eine notwendige Bedingung, und zwar erfüllt diese Aufgabe, ein Instrument der Erfahrung zu sein, nur der euklidische, weil nur er die Anschaulichkeit des einzelnen Falls ermöglicht. Vor jeder Wissenschaft besteht die Tatsache, dass nur unter der einen Form mit euklidischen Eigenschaften ein Gegenstand für uns zur Erscheinung werden kann. Allerdings war sich der Mensch nicht immer dieser Tatsache bewusst: es gab eine Zeit einer empirischen Geometrie. Denn keine Anschauung ist „vor aller Erfahrung“ gegeben. „Die Zeit analoges gilt vom Raume — geht zwar als formale Bedingung der Veränderungen vor diesen objektiv (dem Begriffe nach) vorher, aber subjektiv und in der Wirklichkeit des Bewusstseins ist diese Vorstellung wie jede andere durch Veranlassung der Wahrnehmungen gegeben.“ „Nur der Methode nach, sagt Riehl, gehen die geometrischen Begriffe und Sätze den räumlichen Wahrnehmungen voraus.“ Die Tatsache, dass alles, was uns als äussere Erscheinung gegeben werden soll, in die Form der reinen Anschauung fallen muss, besteht vor jeder wissenschaftlichen Geometrie. Sie ist die Voraussetzung dafür, dass es nicht „beim Herumtappen geblieben ist“, sondern „der sichere Gang einer Wissenschaft für alle Zeiten und in unendliche Weiten eingeschlagen und vorgezeichnet war“.

Damit ist die objektive Gültigkeit der euklidischen Geometrie für Gegenstände einer möglichen Erfahrung gezeigt. Denn sowie die Erkenntnis vorhanden war, dass nichts äusserlich erscheinen könne, was nicht der Anschauungsform gemäss ist, war eine Geometrie, welche ihre Begriffe gemäss den Gesetzen des Anschauens konstruierte, objektiv gültig, aber auch nur für solche Gegenstände, die in der obigen Form gegeben waren. Und das ist der Sinn der transcendentalen Erörterung. Unsere Darstellung erfüllt auch alle Forderungen einer solchen. Denn wirklich ist damit die Raumvorstellung als ein Prinzip erkannt, aus dem die Möglichkeit anderer synthetischen Erkenntnisse apriori eingesehen werden kann. Vor allem aber sind diese nur unter der Voraussetzung der gegebenen Erklärungsart des Raumbegriffs möglich, d. h. haben Gültigkeit für Objekte einer möglichen Anschauung und Erfahrung. Denn um vom Raume „sicher etwas apriori zu wissen", fand der einsichtige Mathematiker, „dass er nicht dem, was er in der Figur sehe, oder auch dem blossen Begriff derselben nachspüren und gleichsam davon ihre Eigenschaften ablernen" müsse, sondern nur durch die Konstruktion gemäss den Gesetzen der Anschauung gelangt er zu einer objektiven Geometrie.

Der transcendentale Beweis dient nicht dazu, die Subjektivität der Raumanschauung aufzuzeigen; denn wie wir oben gesehen, kann diese allein niemals die objektive Gültigkeit begründen. Wohl aber ist es ein Nebenergebnis, dass die Raumvorstellung als Form der äusseren Erscheinung „bloss im Subjekte" ihren Sitz hat. Diesem Resultat könnte man nur aus dem Wege gehen, wenn man an eine prästabilierte Harmonie glaubte. Auch Kant konnte mit der Behauptung, dass unsere Vorstellung vom Raume dem Objekte völlig ähnlich sei, keinen Sinn verbinden. Und es bleibt, um sich vor der ausschliesslichen Subjektivität des absoluten Raumes zu retten, nur die Annahme übrig, dass die Eigenschaften eines Dings „in meine Vorstellungskraft hinüber wandern."

Die hiermit festgestellte Subjektivität der reinen Anschauung ist von keinem Einfluss auf das erkenntnistheoretische Ergebnis. Aber bei diesem ist noch etwas über den Charakter

der Gesetze der Anschauung hinzuzufügen. Diese sind ja nichts weiter als die Axiome. Kant nennt sie treffend die Bedingungen der sinnlichen Anschauung apriori, unter denen allein das Schema eines reinen Begriffs der äusseren Erscheinung zu Stande kommen kann.“ Anscheinend klingt seine Begründung dieser Apriorität ziemlich nichtssagend. In der Methodenlehre heisst es: „Die Axiome sind synthetische Grundsätze apriori, sofern sie unmittelbar gewiss sind.“ Und doch ist sie in ihrer Einfachheit die einzig mögliche. Gesetze und Bedingungen der sinnlichen Anschauung können natürlich nur anschaulich eingesehen werden. Sofern wir in dieser Anschauung von allen Empfindungselementen (den Kantischen) abstrahieren, ist sie eine reine und keine empirische Anschauung, trotzdem sie an Wahrnehmungen anknüpft. Können wir von solchen synthetischen Sätzen mit Poincaré sagen: ils s'imposoraient alors à nous avec une telle force que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice theoretique. Il n'y aurait pas de géométrie non euclidienne? Poincaré verkennt offenbar ganz den Charakter des Kantischen „synthetisch“. Gerade solche Sätze haben nicht den Satz vom Widerspruch zum Prinzip der Auflösung. Im Gegenteil, in ihnen könnte dem Subjektsbegriff das entgegengesetzte Prädikat beigelegt werden. Sie finden vielmehr ihre Auflösung durch den Begriff der Erfahrung.

Wie man aber die mathematische Anschaulichkeit mit dem sinnlichen Sehen und Tasten, das jene allerdings benutzt, in Vergleich stellen kann, ist unglaublich und nur durch zu erklären, dass man glaubt, hinter jedem geometrischen Begriff stehe eine vollständige Anschauung, während Kant nur von einer möglichen spricht. Nehmen wir irgend einen mathematischen Begriff, z. B. eine Fläche wie das Ellipsoid, so wird auch kein einsichtiger Anhänger Kants behaupten, die Anschauung erfasse alle Teile und Eigenschaften. Aber in der reinen Anschauung finden wir ihre Konstruktionsmöglichkeit und durch die Konstruktion in dieser möglichen Anschauung gelangen wir zu allem Wissen über die Fläche. Dasselbe ist bei den Axiomen der Geometrie der Fall. Durch die Sinne allein könnten wir nie die genaue Gültigkeit des

Parallelensatzes demonstrieren, denn die sinnliche Anschauung reicht nicht ins Unendliche. Und selbst wenn die Bestätigung dieses Satzes uns glückte, so hätten wir damit noch kein Axiom für eine wissenschaftliche Geometrie, sondern höchstens den ersten Anfang zu einer induktiven Wissenschaft. Die Bedingungen jeder Konstruktion springen uns mit einer ganz andern Evidenz in die Augen, von der wir Kants Worte aus der Dissertation v. J. 1770 hier citieren wollen: „evidentia (quae est claritas certae cognitionis quatenus assimilatur sensuali) non solum in ipsa est maxima sed et unica, quae datur in scientiis puris, omnisque evidentiae aliis exemplar et medium.“ Schön weist Sigwart in seiner Logik darauf hin, wie unerklärlich es vom empirischen Standpunkte ist, „warum denn die Grade und der rechte Winkel eine so herrschende Rolle unter den geometrischen Begriffen spielen.“ „Wenn wir von den Erzeugnissen menschlicher Kunst absehen — die sichtbare und greifbare Welt pflegt mit dem, was sich einer Graden nähert und Veranlassung zur Bildung dieses Begriffs werden könnte, sehr sparsam zu sein, während sie mit Kurven und gekrümmten Flächen verschwenderisch freigebig ist.“ Wenn die Bedeutung der Graden durch Abstraktion „nicht erklärlich ist, so muss die Tatsache, dass der Mensch den Raum theoretisch mit den Graden und dem rechten Winkel meistert und praktisch seinen eigenen Erzeugnissen ebenso eigensinnig die Grade zu grunde legt, als die Natur sie den ihrigen verweigert, einen andern Ursprung als den aus der Wahrnehmung äusserer Formen haben.“ Wenn Sigwart dann aber glaubt, die Bedeutung der Graden stamme von der Gradlinigkeit des Lichtstrahls, so sagt das nichts; denn womit und woran messen wir, dass der Lichtstrahl die Krümmung Null hat! Ein ewiger Zirkel!

Man hat die Axiome mit den Prinzipien der Mechanik verglichen, da ja beide „verkleidete Definitionen“ sind. Aber dabei hat man vergessen, dass die der Mechanik einen empirischen Charakter tragen, vor allem aber, dass ihnen der euklidische Raum zu grunde liegt, in dem sie gefunden sind. Die Axiome der Geometrie dagegen haben keine andere Bedingung als die Tatsache der Wahrnehmung überhaupt, und

wie der Satz von Ursache und Wirkung den Begriff der Erfahrung. So kommt es auch, dass die Sätze der Mechanik für Objekte der Erfahrung höchstens regulative Gültigkeit haben, die Sätze der Geometrie machen mit den reinen Verstandesbegriffen diese Objekte überhaupt erst möglich. Allerdings hat H. Grassmann in seiner Ausdehnungslehre recht zu sagen: „Die Geometrie geht wie die Mechanik auf ein reales Sein zurück“ und „das ist in der Geometrie der Raum, dessen Begriff keineswegs durch das Denken erzeugt sein kann.“ Aber wer den Raum als eine absolute Realität behandelt und etwa behauptet, dass ein freier Körper infolge eines Antriebes sich auf einer geradesten Linie bewegen muss, die nicht eine grade ist, der schreibt dem Raum mechanische Kräfte zu gleich der Materie. Wo stammt die Arbeit her, die dabei geleistet wird, und wohin verschwindet die Energie? Indem er nach der Ursache des Zwanges fragt, hebt er die Begreiflichkeit der Geometrie auf.

Die Gewissheit der Axiome könnte man höchstens in Vergleich stellen mit der des Identitätssatzes. Dieser ist die notwendige Bedingung des Urteils, jene der Konstruktion in einer möglichen Anschauung. Aber wie der Identitätssatz nicht die psychologische Bedingung des richtigen Denkens ist, so sind die Axiome in ihrer wissenschaftlichen Bedeutung nicht Bedingungen, oder Funktionen des sinnlichen Anschauens. Als solche sind sie Gegenstand psychologischer und physiologischer Analyse. Wie man bei der Zerlegung des logischen Urteils den Identitätssatz findet, so bei der Untersuchung des Begriffs der Erfahrung die reine Anschauung mit ihren Axiomen und die reinen Verstandesbegriffe.

Weiter reicht aber auch der Vergleich zwischen Geometrie und Logik nicht. Wenn Helmholtz schreibt: „alles, was in der Anschauung zu dem rohen Materiale der Empfindung hinzukommt, kann in Denken aufgelöst werden“, so hat er erstens nicht die Kantische Empfindung im Auge. Sodann glaubt er, dass die analytische Geometrie in ihrer Entwicklung sich nur logischer Schlüsse bediene. Das ist sicher richtig; aber man muss bedenken, dass in den Begriffen dieser Wissenschaft das Anschauliche, das Fundament bildet. Womit die

analytische Geometrie arbeitet, ist die Grösse, deren Begriff niemals in blosses Denken aufgelöst werden kann. Schon in der Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und Moral hat Kant gefunden: „Der Begriff der Grösse — ist zum mindesten in der Mathematik unauflöslich.“ Anscheinend widerspricht dem die moderne Mathematik. Im „Bericht über die Mengenlehre“ bemerkt A. Schönflies: Die Analyse der arithmetischen Begriffe „lässt sich dahin charakterisieren, dass die Lehre von den ganzen Zahlen auf drei Grundbegriffe zu gründen ist, auf die Begriffe der Menge, der Ordnung und der Abbildung oder eindeutigen Beziehung. Der Mengenbegriff ist als der ursprünglich resp. objektiv gegebene aufzufassen; das Ordnen und das Abbilden sind die hinzutretenden subjektiven Elemente. Insbesondere führt das Ordnen zum Begriff der Anzahl, das Abbilden zum Gleichheitsbegriff und den Grössenbeziehungen.“ Demnach läge der Grösse der Begriff der Menge zu grunde, d. i. „jede Zusammenfassung von bestimmten, wohl unterschiedenen Objekten zu einem Ganzen.“ Einer solchen Definition gegenüber citieren wir nur, was Kant dagegen sagen würde. „Den Begriff der Grösse überhaupt kann niemand erklären, als etwa so: Dass sie die Bestimmung eines Dinges sei, dadurch, wie vielmal Eines in ihm gesetzt ist, gedacht werden kann. Allein dieses Wievielmal gründet sich auf die successive Wiederholung, mithin auf die Zeit und die Synthesis (des Gleichartigen) in derselben. Realität kann man im Gegensatze zu der Negation nur alsdann erklären, wenn man sich eine Zeit (als dem Inbegriff von allem Sein) gedenkt, die entweder womit erfüllt oder leer ist. Lasse ich die Beharrlichkeit (welche ein Dasein zu aller Zeit ist) weg, so bleibt mir zum Begriffe der Substanz nichts übrig, als die logische Vorstellung vom Subjekt, welche ich damit zu realisieren vermeine: dass ich mir etwas vorstelle, welches blos als Subjekt (ohne wovon Prädikat zu sein) stattfinden kann. Aber nicht allein, dass ich gar keine Bedingungen weiss, unter welchen denn dieser logische Verzug irgend einem Dinge eigen sein werde: so ist auch gar nichts weiter daraus zu machen und nicht die mindeste Folgerung zu ziehen, weil dadurch gar

kein Objekt des Gebrauchs dieses Begriffs bestimmt wird, und man gar nicht weiss, ob dieser überall etwas bedeute." Diese Worte ersparen uns jede weitere Kritik der „wohl unterschiedenen Objekte." Von der reinen Anschauung der Zeit kann niemals abstrahiert werden. Eine mögliche Anschauung muss hinter jedem mathematischen Begriff stehen.

Ausserdem ist noch folgendes zu bemerken. Jede analytische Geometrie setzt schon das Wissen aller Grundbegriffe völlig voraus. Erst nach endlosen, schwierigen Operationen gelangt die moderne Begründung der Geometrie z. B. zum Gradenbegriff, und doch ist die Grade schon auf der ersten Seite ein paarmal zu finden. Wir wollen damit nicht etwa behaupten, dass die schliessliche Definition kein neues Resultat sei. Sie ist aber vorzugsweise nur eine Umschreibung durch die Zahl, die schon nach Kant das Schema der Grösse ist. Vor allem soll damit gezeigt sein, dass der euklidische Raum mit seinen Grundbegriffen alle Wissenschaft vom Raum überhaupt erst möglich macht, dass man nicht durch blosse logische Operationen einen geometrischen Begriff demonstrieren kann, sondern immer eine mögliche Anschauung zugrunde liegt.

Es ist interessant zu sehen, dass schon der erste, der die logische Möglichkeit anderer als der euklidischen Mannigfaltigkeiten mathematisch verfolgt hat, Herrmann Grassmann in seiner Ausdehnungslehre vergebens versucht, sich von der Beziehung auf eine mögliche Anschauung freizumachen. Wie haltlos und unbestimmt Grassmanns Grundbegriffe dann werden, hat schon sein Herausgeber Engels gezeigt: „Tatsächlich hat Gr. mit den Änderungen, von denen er ausgehend sein System der Ausdehnungslehre begründet, nichts anderes gemeint als die Parallelverschiebungen in einem mehrfach ausgedehnten Raum," die natürlich nur durch Konstruktion möglich sind. Wenn man ihnen auch den Lieschen Begriff der Transformation eines mehrfach ausgedehnten Raumes unterlegt, so kommt man damit aus einer möglichen Anschauung nicht hinaus.

Es scheint ja heutzutage das Sekundäre in mathematischen Begriffen zu sein, dass sie Grössenbegriffe sind; aber sicherlich ist es nur diese Eigenschaft, die ihnen die Anwendungsmöglichkeit auf Gegenstände einer möglichen Er-

fahrung zusichert. Nur sofern die Mathematik die Wissenschaft von den Begriffen ist, die durch Konstruktion in der reinen Anschauung entstehen und sich verknüpfen lassen, und sofern diese eine Anschauung die Form unserer Sinnlichkeit ist, ist Mathematik und damit Geometrie möglich, d. h. nach Kant anwendbar. Begriffe aber, die von Grösse und Anzahl völlig abstrahiert haben, wie die der überendlichen Menge von einer gewissen Mächtigkeit, sind eben keine mathematischen mehr. Sie gehen nur in eine analytische Erkenntnis ein, die nur durch die Kombination der verschiedenen Subjekts- und Prädikatsbegriffe der Definitionen den Anschein einer synthetischen erweckt. Trotz allen scheinbar kontinuirlichen Übergangs von der reinen Mengenlehre zur Grössen- und Anzahl-Wissenschaft ist der Unterschied in der Methode beider ein ganz scharfer, wenn wirklich jene gar keine Beziehung auf eine mögliche Anschauung hat. Man kann es sich ja dann leisten, diese Begriffe auf metaphysische Dinge anzuwenden, wie dies G. Cantor, der verdienstvolle Begründer der Mengenlehre, mit seinen transfiniten Zahlen gemacht hat, durch die er das Verhältnis der Attribute der Spinoza'schen Substanz zu dieser klar zu machen versucht. Aber auf Gegenstände einer möglichen Erfahrung wird eine solche Mathematik niemals angewandt werden können. Das ist vorzüglich Kants Verdienst, erkannt zu haben, wie weit und warum die Mathematik ein Instrument der Erfahrung ist. Und sie wäre ihm „die Beschäftigung mit einem blossen Hirngespinnst wäre der Raum nicht als Bedingung der Erscheinungen, welche den Stoff zur äusseren Erfahrung ausmachen, anzusehen."

Damit soll keineswegs ein Urteil über unsere zu so glänzenden Methoden gelangte reine Mathematik gefällt werden. Vielmehr ist es ja erst dieser, insonderheit der Lieschen Gruppentheorie, gelungen, für jeden Raumbegriff die notwendigen und hinreichenden Axiome aufzustellen, und die Bedeutung jedes einzelnen in das rechte Licht zu setzen. Für den Mathematiker führt allerdings die Frage nach den Axiomen auf eine „logische Analyse der Raumvorstellung" besser des Raumbegriffs. Aber für denjenigen, der wie Kant den Wert dieses für unsere Erfahrung zum Gegenstande seiner Unter-

suchung macht, ist es die Beziehung auf eine mögliche Anschauung, welche den mathematischen Begriffen ihren Wert giebt. Insofern können wir nochmals mit Grasmann sagen, geht die Geometrie auf ein reales Sein zurück. Denn die Form der Anschauung ist eben eine Tatsache. Die Axiome sind in der Natur der objektiven Wirklichkeit begründet, denn auch das Subjekt gehört dieser an. Aus dem Grunde ist es auch — bemerkt Lotze — unpassend zu behaupten, „dass die Dinge an sich ganz unräumlich seien" und „sie dennoch in räumliche Auffassungsformen, die unser Geist ihnen vorhalte, fallen zu lassen. Denn es kann nichts in eine Form fallen, für die es nicht irgendwie passt." Aber während die Principien der Mechanik empirischer Natur sind, sind die Axiome als Bedingungen der Konstruktion gesetzlicher Natur.

Berücksichtigte Litteratur.

Cohen, Kants Theorie der Erfahrung.
Helmholtz, Reden und Vorträge.
— Über die Tatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.
Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.
Hilbert, Über die Grundlagen der Geometrie.
Husserl, Logische Untersuchungen I.
Medicus, Kants Transcendentale Aesthetik.
Lotze, Grundzüge der Metaphysik.
B. Erdmann, Die Axiome der Geometrie.
Poincaré, La science et l'hypothèse.
Riehl, Philosophischer Kriticismus.
— H. v. Helmholtz in seinem Verhältnis zu Kant.
Schönflies, Bericht über die Mengenlehre (Jahresber. d. Math. Verein. 1900.)
Thiele, Intellektuelle Anschauung bei Kant.
Vaihinger, Kantkommentar II.
Sigwart, Logik.
und die erkenntnistheoretischen Schriften Kants.
H. Grassmann, Ausdehnungslehre von 1842.

Lebenslauf.

Ich, Walther, Robert Dietrich, wurde am 1. August 1880 in Luckau N.-L. als Sohn des Gymnasialoberlehrers Dr. phil. Otto Dietrich und seiner Gemahlin Frau Franziska geb. Wischer geboren. Ich bin evangelischer Konfession und preussischer Staatsangehörigkeit. Nachdem ich in meiner Heimatstadt den Anfangsunterricht genossen, besuchte ich das Königstädtische Gymnasium zu Berlin und darauf das Königliche Pädagogium und Waisenhaus in Züllichau. Von dort ging ich Michaelis 1899 mit dem Zeugnis der Reife ab und bezog in Halle a. S. die Universität, um Mathematik, Physik und Philosophie zu studieren. Hier hörte ich die ausgezeichneten Männer:

Brandes, Buchholz, Cantor, Dorn, Eberhard, Fries, Grassmann, Haym, Klebs, Lorenz, Mez, Neumann, Riehl, Schmidt, Schultze, Vaihinger, Volhard, Wangerin.

Diesen meinen verehrten Lehrern sage ich an dieser Stelle meinen ergebensten Dank.

Am 16. Januar 1904 bestand ich die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen. Seit Ostern 1904 bin ich zur Ableistung meines Seminarjahres dem Askanischen Gymnasium in Berlin zugewiesen.